Geometría Afín y Proyectiva	PARCIAL 1	23 Octubre 2015
Tiempo: 1.5 horas		
NOMBRE:		

1. (2 puntos). a) Definir suma de dos subespacios afines de $\mathbf{A}^n$ y escribir la fórmula de las dimensiones.
b) Si S es un plano y T una recta de $\mathbf{A}^4$, determinar la dimensión y dar una referencia de $S+T$ en el caso de que sean paralelos y en el caso de que se crucen.

a) Es el menor subespacio afín que los contiene.

$S\cap T \neq \phi$: $\dim S+T = \dim S + \dim T - \dim S\cap T$

$S\cap T = \phi$: $\dim S+T = \dim S + \dim T - \dim \vec{S}\cap\vec{T} + 1$

b) S y T paralelos: $\dim S+T = 2+1-\cancel{1}+\cancel{1} = 3$ $(\dim \vec{S}\cap\vec{T} = 1)$

$R = \{\underbrace{P;\bar{v}_1,\bar{v}_2}_{\in S}, \vec{PQ}\}$ con $P\in S$ y $Q\in T$.

S y T se cruzan: $\dim S+T = 2+1-0+1 = 4$ $(\dim \vec{S}\cap\vec{T} = 0)$

$S+T = \mathbb{A}^4$, R canónica.

2. (2 puntos). a) Si $R_1 = \{P;\overline{u},\overline{w}\}$ y $R_2 = \{Q;\overline{a},\overline{b}\}$ son dos referencias del plano afín $\mathbf{A}^2$, escribir la matriz del cambio $C(R_1,R_2)$ en coordenadas homogéneas.
b) Definir referencia baricéntrica asociada a una referencia cartesiana en $\mathbf{A}^n$. Calcular la referencia baricéntrica asociada a la referencia $R=\{(1,0,0);(1,2,0),(-1,0,1),(2,1,0)\}$ y calcular las coordenadas baricéntricas de $P=(1,1,1)$ respecto de ella.

a) $$C(R_1,R_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} & Q \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}}_{C(R_c,R_2)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{w} & P \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{C(R_1,R_c)}$$

b) Si $R=\{P;\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3\}$ ref. cartesiana, $R_a = \{P, P+\bar{v}_1, P+\bar{v}_2, P+\bar{v}_3\}$

$$\boxed{R_a = \{(1,0,0), (2,2,0), (0,0,1), (3,1,0)\}}$$

Coordenadas de P respecto de R: $\begin{cases} 1 = 1+\lambda-\mu+2\gamma \\ 1 = 2\lambda+\gamma \\ \boxed{1 = \mu} \end{cases}$

$\begin{cases} 1 = \lambda+2\gamma \\ 1 = 2\lambda+\gamma \end{cases}$

$0 = -\lambda+\gamma$

$\lambda = \gamma$

$1 = 3\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = 1/3 = \gamma}$

$\boxed{(-2/3, 1/3, 1, 1/3)}$ baricéntricas respecto R_a

3. (2 puntos).

a) Matriz de la aplicación afín de $\mathbf{A}^3$ en $\mathbf{A}^2$ que transforma los puntos (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) y (0,0,0) en los puntos (1,2), (3,4) (5,6) y (7,8) respectivamente.

b) Definir sesgo en $\mathbf{A}^n$ y calcular la matriz del sesgo de base $\pi = \underbrace{(1,2,3)}_{P} + \mathrm{L}\{\underbrace{(1,1,0)}_{\bar{v}_1}, \underbrace{(1,1,1)}_{\bar{v}_2}\}$ y que transforma el punto $P=(0,0,0)$ en el punto $Q=(1,1,1)$.

a)
$$\tilde{f}(1,0,0) = f(1,0,0) - f(0,0,0) = (1,2)-(7,8) = (-6,-6)$$
$$\tilde{f}(0,1,0) = f(0,1,0) - f(0,0,0) = (3,4)-(7,8) = (-4,-4)$$
$$\tilde{f}(0,0,1) = f(0,0,1) - f(0,0,0) = (5,6)-(7,8) = (-2,-2)$$

$$\boxed{M\tilde{f}(R_c^3, R_c^2) = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 & 7 \\ -6 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Aplicación afín que tiene un hiperplano H de puntos fijos y $\forall P \notin H$, $\overrightarrow{Pf(P)} \in \vec{H}$.

Escojo la referencia: $R = \{\underbrace{P; \bar{v}_1, \bar{v}_2}_{\in \pi \text{ (fijos)}}, \overrightarrow{P_0P}\}$ $\overrightarrow{P_0P} \longrightarrow \overrightarrow{P_0Q}$

$$M_f(R_c) = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \overrightarrow{P_0Q} & P_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{M_f(R,R_c)} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \overrightarrow{P_0P} & P_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1}}_{C(R_c,R)} =$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}$$

4. (2 puntos). a) Clasificar y determinar los elementos del movimiento en $\mathbf{A}^2$ de ecuación $f(x,y) = (-y+2, -x-1)$

b) Sabiendo que el movimiento en $\mathbf{A}^3$ dado por la ecuación siguiente es un giro, determinar el eje y el ángulo. $f(x,y,z) = (y+1, z+1, x-2)$

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A = M_f^2(B_c)$; $|A| = -1 \Rightarrow$ movimiento inverso

Puntos fijos: $\begin{cases} -y+2 = x \\ -x-1 = y \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 2 \\ x+y = -1 \end{cases}$ No tiene

Es una SIMETRÍA DESLIZANTE $(T_{\bar v} \circ S_L \ , \ \bar v \parallel L)$

• VECTOR : $\bar v = \frac{1}{2} \overrightarrow{O f^2(O)}$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\bar v = (3/2, -3/2)}$

• EJE : puntos fijos de $T_{-\bar v} \circ f$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -y + 1/2 = x \\ -x + 1/2 = y \end{cases}$ $\boxed{x + y = \frac{1}{2}}$

b) EJE : puntos fijos $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x+y+1=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y+1 \\ z = y-1 \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} x = \lambda+1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda - 1 \end{cases}}$

ÁNGULO: $\bar w \perp$ eje , $\bar w = (1,1,0)$, $\tilde f(\bar w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha = \bar w \widehat{\ } \tilde f(\bar w)$: $\cos\alpha = \frac{-1}{2}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \text{sen}\, \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{\alpha = -120^\circ}$

5. (2 puntos). Dado el plano de $\mathbf{A}^3$ $\pi = (1,2,3) + \mathrm{L}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$, se pide:

a) La matriz de todas las simetrías rotacionales con plano de simetría π y tales que $(1,2,3)$ es punto fijo.

b) La matriz de todos los movimientos helicoidales de eje la recta del apartado anterior.

a) $G_{L,\alpha} \circ S_\pi \quad (L \perp \pi)$

Escojo la referencia: $R = \{ \overset{\in \pi}{P = (1,2,3)} ; \overbrace{\underset{\overline{v}_1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)}, \underset{\overline{v}_2}{(0,0,1)}}^{\in \vec{\pi}}, \overbrace{\underset{\overline{v}_3}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}}^{\perp \vec{\pi}} \}$

donde $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$.

$$M_g(R_c) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C(R,R_c)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_G(R)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_S(R)} \cdot C(R,R_c)^{-1}$$

$\forall \alpha \in [0, 2\pi]$

b) $T_{\overline{v}} \circ G_{L,\alpha} \quad (\overline{v} \parallel L)$

$$M_g(R_c) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id} & \begin{matrix} K \\ -K \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right) \cdot C(R,R_c) \cdot M_G(R) \cdot C(R,R_c)^{-1}$$

$\forall K \in \mathbb{R}$